Entrenamientos Estatales 2018
COMBINATORIA
Coeficientes Binomiales

Empecemos recordando una técnica de conteo basada en el conteo con repeticiones:

Ejemplo. Se deben elegir dos estudiantes de entre un grupo de 30 alumnos para un concurso de matemáticas ¿De cuántas formas se puede hacer esto?
Solución. Hay 30 maneras de elegir al primero y 29 para elegir al segundo, pero como no importa el orden hay que dividir entre dos (pues el equipo {A, B} es el mismo que el {B, A}), por lo tanto en total son $\frac{30\times 29}{2}=435$. Denotaremos a este número como $\binom{30}{2}$. ■

Ejemplo. ¿Y si ahora se deben elegir 6 estudiantes?
Solución. Hay 30 maneras de elegir al primer integrante, 29 maneras de elegir al segundo y así sucesivamente hasta el sexto que se puede de 25 maneras. Pero como no importa el orden en que se elijan, hay que eliminar las repeticiones dividiendo entre las posibles permutaciones de estos 6 elementos, por lo que el resultado es $\frac{30\times 29\times 28\times 27\times 26\times 25}{6!}$. Denotaremos a este número como $\binom{30}{6}$. ■

Debido a que este tipo de conteo es muy útil y aparece en una gran cantidad de problemas es necesario hacer énfasis en él y ponerle nombre.

Definición. El número de maneras de elegir k elementos a partir de un total de n se denota por $\binom{n}{k}$ y es igual a:

$$\frac{n\times(n-1)\times\ldots\times(n-(k-2))\times(n-(k-1))}{k!}=\frac{n!}{k!\times(n-k)!}$$

A este número se le llama *combinaciones* de n en k.

Ejercicio.
- Decir quién es n y quién es k en los dos ejemplos anteriores.
- Justificar la igualdad que aparece en la definición.

NOTA:
- Vale la pena enfatizar que la fórmula de combinaciones es válida precisamente cuando se hace una elección en la que <u>no</u> importa el orden de los elementos.
- Recordemos que adoptamos la convención 0!= 1, de esta manera también tiene sentido $\binom{n}{0}$ y es igual a 1 para toda n. (¿Cuántas maneras hay de elegir 0 elementos? Una, ¡elegir nada!)

Propiedades.

i) $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$

ii) $\binom{n+1}{k}=\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}$. A esta se le llama fórmula de Pascal.

Contacto: rosembergtoala@gmail.com

Demostración. i) Observemos que elegir a los *k* elementos que queremos es equivalente a elegir los (*n*-*k*) elementos que no queremos.
ii) Vamos a contar de dos formas distintas las maneras de elegir *k* elementos de un total de *n+1*, el primer lado de la igualdad es lo que ya sabemos. El segundo lado se obtiene del siguiente razonamiento: Nos fijamos en un elemento de los *n+1* totales, digamos A, luego cada conjunto de *k* elementos tiene dos opciones, contiene a A o no lo contiene; si lo contiene entonces hay justamente $\binom{n}{k-1}$ maneras de elegir a los *k-1* elementos restantes y si no lo contiene hay $\binom{n}{k}$ maneras de elegir los *k* elementos, por lo tanto hay en total $\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}$ formas de elegir *k* elementos de un total de *n+1*. De aquí que ambos lados de la ecuación deben ser iguales. ■

Ejercicio.
- Demostrar las propiedades i) y ii) a partir de la fórmula $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\times(n-k)!}$.

Ejemplo. María tiene 6 libros de matemáticas y Pilar tiene 8. ¿Cuántas maneras tienen de intercambiar 3 libros?
Solución. Hay $\binom{6}{3}=20$ maneras de elegir los 3 libros de María y $\binom{8}{3}=56$ de elegir los de Pilar, luego hay en total 20×56=1220 maneras en total de intercambiar 3 libros. ■

El siguiente teorema es la razón por la cual a las combinaciones de *n* en *k* se le llaman coeficientes binomiales:

Teorema del Binomio de Newton. Sean *a* y *b* números arbitrarios y *n* un número natural. Entonces:

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\ldots+\binom{n}{n-1}ab^{n-1}+\binom{n}{n}b^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

Demostración. Al hacer el producto de los n factores de (*a*+*b*) × (*a*+*b*) ×… × (*a*+*b*) observamos que en cada paso hay que elegir entre *a* o *b*, por lo que en la suma desarrollada aparecen puros términos de la forma $a^{n-k}b^k$ con $k = 0,1,\ldots,n$. Luego observamos que para obtener un término así se necesita escoger justamente los *k* factores *b*'s, ya que los *n*-*k* factores *a*'s quedan determinados, y esto se puede de $\binom{n}{k}$ maneras. ■

Otra forma de pensarlo: al desarrollar el producto, cada sumando es como una palabra de *n* letras con *a*'s y *b*'s y los términos semejantes son aquellas palabras con igual número de *a*'s (y por lo tanto de *b*'s) ¿Cuántas palabras con *n* letras se pueden formar usando solamente *k* letras *a* y *n*-*k* letras *b*?

Contacto: rosembergtoala@gmail.com

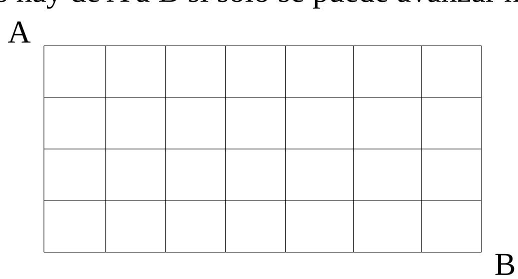
Entrenamientos Estatales 2018
COMBINATORIA
Coeficientes Binomiales

Ejercicio.
- Desarrollar los casos n = 2, 3 y 4 para convencerse.
- Desarrolla $(2x\text{-}y)^4$.

PROBLEMAS.

1. En una bolsa hay 3 pelotas rojas y 2 azules. ¿De cuántas maneras distintas se pueden acomodar en una fila? ¿De cuántas maneras se pueden acomodar solamente 3 pelotas en una fila?
2. ¿Cuántas maneras hay de dividir a un grupo de 15 personas en 3 equipos de 5 personas cada uno?
3. Un escuadrón especial consiste de 3 oficiales, 6 sargentos y 60 soldados. ¿De cuántas maneras se puede elegir un grupo de 1 oficial, 2 sargentos y 20 soldados?
4. Diez puntos están marcados en una línea recta y 11 puntos están marcados sobre otra línea recta paralela a la primera. ¿Cuántos
   i. Triángulos
   ii. Cuadriláteros

   se pueden formar con vértices en estos puntos?
5. Se tiene un conjunto de 15 palabras. ¿De cuántas maneras se puede elegir un subconjunto de no más de 5 palabras?
6. Encuentra el término que no contiene a x en el desarrollo de
$$\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^9$$
7. Hay 4 parejas casadas en un club. ¿De cuántas maneras se puede elegir un comité de 3 personas de tal manera que no haya un matrimonio incluido en el comité?
8. Hay 31 estudiantes en una clase, incluyendo a Pedro y Juan. ¿Cuántas formas hay de formar un equipo de futbol (11 jugadores) de manera que Pedro y Juan no estén juntos en el equipo?
9. ¿De cuántas maneras pueden acomodarse en un estante 3 cuadernos rojos, 4 azules y 2 verdes, si los verdes no deben quedar juntos?
10. Encontrar el coeficiente del término $a^7b^4ce^2$ en el desarrollo de $(a+b+c+d+e)^{14}$.
11. ¿Cuántos caminos hay de A a B si solo se puede avanzar hacia la derecha y hacia abajo?



12. ¿Cuántos rectángulos distintos tienen sus lados sobre las líneas de una cuadrícula de 10x10? NOTA: Los cuadrados también son rectángulos

Contacto: rosembergtoala@gmail.com

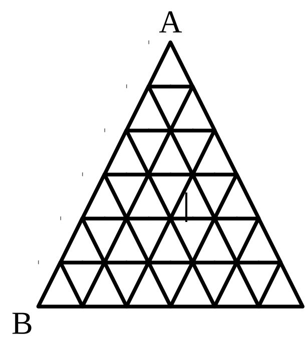
Entrenamientos Estatales 2018
COMBINATORIA
Coeficientes Binomiales

13. El ***<u>Triángulo de Pascal</u>*** se forma de la siguiente manera, se empieza con un renglón de dos 1's y cada renglón se obtiene a partir del anterior sumando los dos números que aparecen arriba:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}
$$

Construye los siguientes dos renglones y justifica porque el k-ésimo número del n-ésimo renglón es precisamente $\binom{n}{k}$. NOTA: Se empieza desde $k = 0$, es decir, los 1's del lado izquierdo del triángulo son los 0-ésimos de su respectivo renglón.

14. Siguiendo las líneas de la cuadrícula, ¿cuántos caminos hay para ir del punto A al punto B que no pasen dos veces por el mismo punto y que sólo avancen hacia abajo y hacia los lados pero no hacia arriba?



15. ¿De cuántas maneras pueden acomodarse en un estante 3 cuadernos rojos, 4 azules y 2 verdes, si los verdes no deben quedar juntos?

16. ¿Cuántas palabras se pueden formar usando 15 D's y 5 I's?

17. Explica que tiene que ver la pregunta anterior con el problema del examen: En una recta se marcan los puntos A y B tales que el segmento AB mide 1 m. Una rana se mueve sobre la recta y en cada salto se desplaza 10 cm a la derecha o a la izquierda. La rana quiere ir de A hasta B en exactamente 20 saltos. ¿De cuántas maneras puede hacerlo?
Nota: No importa que pase repetidas veces por A o B, o que se salga del segmento AB siempre y cuando al final termine en B.

18. Mi mamá tiene 5 sartenes y cada día usa 2 para cocinar. A lo largo de un mes (30 días) usa a todos la misma cantidad de veces para que se desgasten por igual. ¿Cuántas veces usó cada sartén?

19. ¿Cuántos términos tiene la expansión de $(a+b+c)^5$ y de qué forma son?

Contacto: rosembergtoala@gmail.com